Sujet N° 4

Série ES

Epreuve : Mathématiques - Devoir commun
Durée de l'épreuve : 4 heures – **Coefficient** : 9

Exercice 1 (5 points)

Pour chacune des questions ci-après, une seule des réponses proposées est exacte.
Une bonne réponse rapporte 1 point. Une mauvaise réponse enlève 0,25 point.
L'absence de réponse n'apporte ni enlève aucune point.
Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est 0.

1. L'expression $\frac{e^{x-1}\times e^{2x}}{\left(e^{x+1}\right)^2}$ est egale :

a) $\frac{e^x}{e^2}$ b) e^{x-3} c) $e^{-3}\times e^{2x}$

2. La dérivée de la fonction f définie sur **R** par : $f(x)=xe^x-1$.

a) $f'(x)=e^x-1$ b) $f'(x)=xe^x+e^x$ c) $f'(x)=xe^x-e^x$

3. Le prix d'un article a augmenté de 12% en trois ans . Le taux d'évolution annuel moyen , en pourcentage, (arrondi à 0,1% prés) est alors de :

a) 3,8 % b) 5,8% c) 4%

4. Le nombre de membre d'une association est passe de 1150 en 2006 à 1221 en 2007 puis à 1503 en 2008 . En prenant pour indice de référence 100 en 2006, l'indice , arrondi au centième pour l'année 2008 est :

a) 123,10 b) 1,31 c) 130,70

5. On considère la fonction f définie sur]-∞ ; 2[par : $f(x)=3+\frac{-1}{2-x}$

Alors $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ est égale :

a) 0 b) +∞ c) - ∞

Exercice 2 : (5 points)

Partie A

On considère la fonction g définie sur **R** par $g(x)=3e^x+1-x$.

1. (a) Déterminer les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$.

(b) Calculer la dérivée $g'(x)$.

(c) Étudier son signe et dresser le tableau des variations $g(x)$ sur **R**.

(d) En déduire le signe de $g(x)$ sur **R.**

Partie B

On considère la fonction f définie sur **R** par $f(x) = 3x + 1 + xe^{-x}$.

On note Cf la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé

1. Déterminer les limites de f en +∞ et -∞

2. Montrer que la dérivée de $f(x)$ est : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{e^x}$, où g est la fonction dans la partie A.

3. Dresser le tableau des variations complet de f sur **R**.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur **R**.

On notera α cette solution. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Exercice 3 (4 points)

Dans une petite entreprise, la fabrication journalière de x litres d'un certain produit chimique impose un coût de fabrication,en centaine DJF, noté $f(x)$.

Ce produit étant revendu au prix de 7,5 centaine DJF par litre, le chiffre d'affaires, en centaine DJF, réalisé par l'entreprise, pour la vente de x litres de ce produit est donc le nombre réel g (x) = 7,5x.

Partie A

En annexe 1, on a tracé la courbe Cf représentative de la fonction f dans un repère orthogonal; le volume en litres de produit fabriqué est porté en abscisses et le coût de fabrication en centaine DJF est porté en ordonnées.

1. Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes :

(a) Quel est le coût de fabrication pour une production journalière de 40 litres ? De 80 litres ?

(b) Quelle production journalière correspond à un coût de fabrication de 550 DJF ?

(c) Quelle est la production journalière maximale pour que le coût de fabrication n'excède pas 400 DJF ?

2. Dans le repère précédent, tracer la droite d'équation $y = 7{,}5x$ et déterminer graphiquement combien l'entreprise doit fabriquer d'unités pour être bénéficiaire.

Partie B

Dans la suite de l'exercice, on admet que la fonction f est définie, pour tout nombre réel x de l'intervalle [0;100] par la relation $f(x) = 0{,}0625x^2 + 1{,}25x + 100$.

1. Montrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle [0 ; 100].

$g(x)\text{-}f(x) = 56{,}25 - 0{,}0625(x - 50)^2$

2. En déduire le bénéfice maximal que l'entreprise peut réaliser, en précisant la production journalière correspondante.

Exercice 4 : (6 points)

Le tableau ci-dessous donne l'évolution de la population mondiale (en milliards) entre 2004 et 2010.

Année	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Rang de l'année : x_i	1	2	3	4	5	6	7
Nombre d'habitants (en milliards) : y_i	4,4	4,8	5,4	5,6	6,0	6,6	6,8

Partie A

1. Représenter le nuage de points $(x_i ; y_i)$ associé au tableau ci-dessus dans le repère : **(voir annexe 2)**

2. (a) Déterminer une équation de la droite régression de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés. Les coefficients obtenus seront arrondis au centième

(b) Représenter la droite (d) dans le repère précédent

3. En supposant que ce modèle reste valable jusqu'en 2018 :

(a) Estimer l'effectif de la population mondiale en 2015

(b) À partir de quelle année la population mondiale devrait-elle dépasser à 8 milliards d'habitants.

Partie B

À partir des données fournies dans le tableau de la partie A.

1. Calculer le taux d'évolution global de la population mondiale entre 2004 et 2010, exprimé en pourcentage (arrondi à 0,01% prés).

2. Calculer le taux moyen annuel d'évolution de la population mondiale entre 2004 et 2010, exprimé en pourcentage (arrondi à 0,01% prés)

3. En supposant que ce taux se maintient , donner une estimation de la population mondiale en 2015

4. On considère l'algorithme ci-dessous.

Variables : x, y : réels
Entrée : Saisir x
Traitement : y prend la valeur 6,8 Tant que $y < 8$ faire y prend la valeur $\left(1+\frac{6,42}{100}\right)\times y$ x prend la valeur x+1 Fin Tantque x prend la valeur 2004+x
Sortie : Affiche x

(a) Exécuter cet algorithme pour $x = 7$.

(b) Que fait cet algorithme?

(c) En déduire à partir de quelle année la population mondiale sera supérieur à 8 milliards d'habitants ?

Annexe de l'exercice 3 :