Sujet 1

Série / ES — Épreuve / Mathématiques — Durée / 3 H

Coefficient / 6 — Baccalauréat / 1er tour — Session / 2018

Exercice 1 : 5 points

1. La copie d'écran ci-dessous donne les premières valeurs d'une suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_0 = 15$ et

D2 — f_x =3*C2-C1+6

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7
2	u_n	15	51	158					

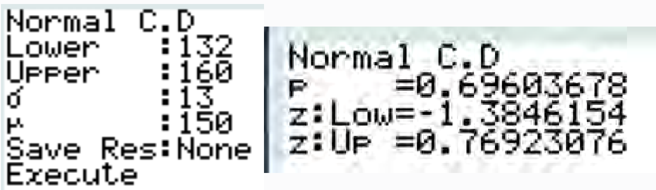
a) $u_{n+1} = 3u_n - n + 6$

2. Soit g la fonction définie sur R par : $g(x) = (3x+2)\ln x$.

La dérivée sur R de la fonction g est : $g(x)=3\ln(x)+(3x+2)\times\frac{1}{x}=\frac{3x\ln(x)+3x+2}{x}$

b) $g'(x)=\frac{3x\ln x+3x+2}{x}$

3. On considère la variable aléatoire Z suivant la loi normal de d'espérance μ = 150 et d'écart-type σ = 13. La probabilité p (132 ≤ X ≤ 160) vaut environ :



a) 70 %

4. Dans un échantillon de 450 élèves d'un lycée, 125 élèves possèdent une carte SIM à leur nom. Au seuil de 95 %, on peut estimer pour ce lycée que la proportion d'élèves ayant une carte SIM à leurs noms est : $f=\frac{125}{450}=\frac{5}{18}\approx 0,28$

On a $n=450\geq 30,\ nf=450\times\frac{125}{450}=125\geq 5$ et $n(1-f)=450\times\left(1-\frac{125}{450}\right)=325\geq 5$

conditions $n\geq 30,\ nf\geq 5$ et $n(1-f)\geq 5$ sont vérifiées.

$$I_{confiance} = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] = \left[\frac{5}{18} - \frac{1}{\sqrt{450}} ; \frac{5}{18} + \frac{1}{\sqrt{450}} \right] \approx [0,230 ; 0,325].$$

Donc la proportion des élèves ayant une carte SIM à leurs noms appartient à l'intervalle [0,230 ; 0,325].

a) [0,230 ; 0,325]

5. Le prix d'un article a augmenté en 6 mois de 42 %. Alors on peut affirmer que mensuellement, le prix de cet article a augmenté en moyenne de :

$t_n = (1+0,42)^{\frac{1}{6}} - 1 \approx 0,06$ soit $t_n = 6\%$.

b) 6 %

Exercice 2 : 6 points

la fonction f définie sur **R** par : $f(x) = (2x-3)\mathrm{e}^x$

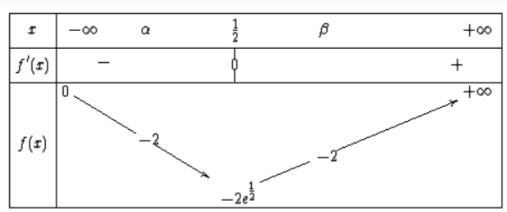
1. **a)** $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^x = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} -3\mathrm{e}^x = 0 \end{array}\right\}$ donc par produit de limites on a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

La droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à **C**f.

b) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} (2x-3) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty \end{array}\right\}$ donc par produit de limites on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2. **a)** $f'(x) = 2\,\mathrm{e}^x + (2x-3)\,\mathrm{e}^x = (2x-1)\,\mathrm{e}^x$

b)

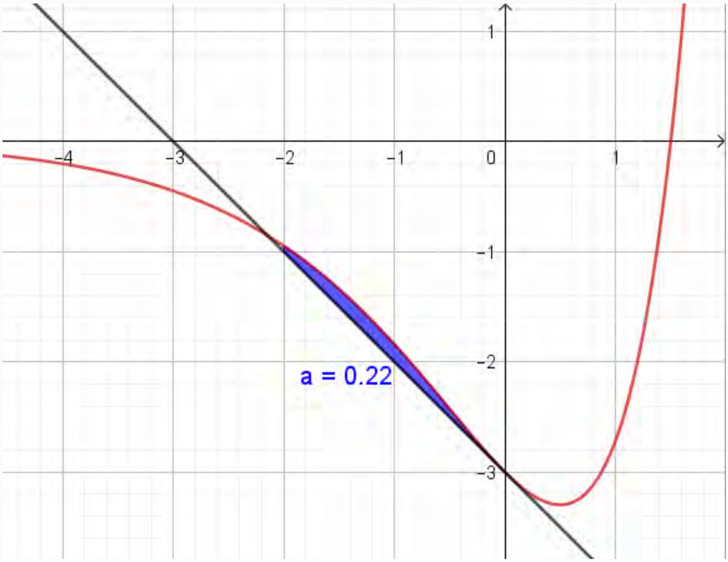


3. **a)** D'après le tableau de variation l'équation f(x) = -2 admet deux solutions sur R.
b) À l'aide de la calculatrice, on α ≈ -0,86 et β ≈ 1,20.

4. **a)** L'équation de la tangente (d) est $y = -x - 3$.
b) Il semble que la courbe Cf soit au-dessus de la droite (d) sur l'intervalle [-2, 0].

5. **a)** $F'(x) = 2\,\mathrm{e}^x + (2x-5)\,\mathrm{e}^x = (2x-3)\,\mathrm{e}^x = f(x)$ Donc ***F*** est une primitive de f.
b) $\int_{-2}^{0} (f(x) + x + 3)\,dx = \left[F(x) + \frac{x^2}{2} + 3x \right]_{-2}^{0} = -1 + 9\mathrm{e}^{-2} \approx 0,22.$

Donc l'aire du domaine compris entre la droite (d), la courbe Cf , et les droites $x = -2$ et $x = 0$ est environ 0,22.



Exercice 3 : 5 points

Partie A

1. **a)** Le graphe T n'est pas complet car il y a des sommets qui ne sont pas adjacents. Cela signifie qu'il n'est toujours pas possible de se rendre d'un dépôt à l'autre ou d'un dépôt au site de production sans passer par un dépôt.

   b) Le graphe T est connexe car aucun sommet n'est isolé.

2. On cherche si le graphe T admet une chaine eulérienne.

Sommet	A	B	C	D	E	F	G	S
Degré du sommet	5	3	2	5	2	4	3	2

On sait qu'un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si ce graphe possède zéro ou deux sommets de degré impair. Donc le graphe T n'admet pas une chaîne eulérienne car il y a 4 sommets de degrés impairs.

3. la matrice A associée au graphe T est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. **a)** il y a 4 chaînes de longueur 3 reliant le sommet S au sommet D.
b) Les chaines de longueurs 3 reliant les sommets S et D sont :
SABD ; SACD ; SGAD ; SGFS

Partie B

On va utiliser l'algorithme de Dijkstra pour déterminer le chemin le plus court qui mène du site de production S au dépôt E.

S	A	G	B	F	C	D	E
X	3S	13S					
	X	~~17A~~ 13S	10A		8A	15A	
		13S	10A		X	15C	
		13S	X	18B		14B	
		X		~~22G~~ 18B		14B	
				17E		X	18D
				X			~~20F~~ 18D
							X

Le chemin le plus court pour aller de S à E à une longueur de 18 km.
C'est le chemin S-A-B-D-E.

Exercice 4 : 5 points

Partie A

1. c'est l'algorithme 1 qui permet de permet d'afficher tous les termes de la suite (un) jusqu'à un rang N saisi en entrée.
2. Voici les premières valeurs de la suite (un) :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
u_n	6	10	12	13	13,5	13,75	13,88	13,94	13,97	13,98	13,992188	13,996094	13,99805	13,999023

La suite (un) semble croissante et semble converger vers le nombre 14.

Partie B

1. $v_{n+1} = u_{n+1} - 14 = -7 + \frac{1}{2}u_n = \frac{1}{2}(u_n - 14) = \frac{1}{2}v_n.$

(vn) est une suite géométrique de raison $v_0 = -8.$ et son premier terme $v_0 = -8.$

2. $u_n = 14 + v_n = 14 - 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n.$

3. $u_{n+1} - u_n = \left(14 - 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) - \left(14 - 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n > 0.$ Donc la suite (un) est croissante.

4. $\lim_{n \to +\infty} u_n = 14.$ Donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = 14.$

5. $14 - u_n \leq 10^{-9} \Leftrightarrow 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 10^{-9} \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln\left(\frac{10^{-9}}{8}\right)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$ C'est à partir du rang $n = 33$ que l'on a $14 - u_n \leq 10^{-9}$.