Série ES

Corrigé Sujet N° 4

Epreuve : Mathématiques - Devoir commun
Durée de l'épreuve : 4 heures – **Coefficient** : 9

Exercice 1 (5 points)

Pour chacune des questions ci-après, une seule des réponses proposées est exacte. *Une bonne réponse rapporte 1 point. Une mauvaise réponse enlève 0,25 point. L'absence de réponse n'apporte ni enlève aucune point. Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est 0.*

1. L'expression $\dfrac{e^{x-1}\times e^{2x}}{\left(e^{x+1}\right)^2}$ est égale :

$\dfrac{e^{x-1}\times e^{2x}}{\left(e^{x+1}\right)^2}=\dfrac{e^{x-1+2x}}{e^{2x+2}}=e^{3x-1-2x-2}=e^{x-3}.$

Réponse b

2. La dérivée de la fonction f définie sur R par : $f(x) = xe^x - 1$.

La dérivée de f est : $f'(x) = e^x + x\,e^x$. **Réponse b**

3. Le prix d'un article a augment de 12% en trois ans. Le taux d'évolution annuel moyen, en pourcentage, (arrondi à 0,1% prés) est alors de :

$t_m=\left(\left(1+\dfrac{12}{100}\right)^{\frac{1}{3}}-1\right)\times 100=3{,}8\%$

Réponse a

4. Le nombre de membre d'une association est passe de 1150 en 2006 à 1221 en 2007 puis à 1503 en 2008. En prenant pour indice de référence 100 en 2006, l'indice, arrondi au centième pour l'année 2008 est :

$\dfrac{I_{2008}}{100}=\dfrac{1503}{1150}=130{,}70.$ **Réponse c**

5. On considéré la fonction f définie sur l'intervalle $]-\infty\,;2[$ par : $f(x)=3+\dfrac{-1}{2-x}$.

Alors $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ est égale :

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\left(3+\dfrac{-1}{2-x}\right)=-\infty.$

Réponse c

Exercice 2 : (6 points)

Partie A

On considère la fonction g définie sur **R** par $g(x) = 3e^x + 1 - x$.

1. (a) Les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$:

- La limite de g en $-\infty$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} 3e^{x}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty} 1-x=+\infty\end{array}\right\} par\ somme \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty.$$

- La limite de g en + ∞:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} 3+e^{-x}-xe^{-x}=3\end{array}\right\} par\ somme \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty.$$

(b) La dérivée $g'(x) = 3e^x - 1$.

(c) Signe de la dérivée et le tableau des variations g :

- Signe de la dérivée :

$$3e^{x}-1\geq 0 \Leftrightarrow e^{x}\geq\frac{1}{3}\Leftrightarrow x\geq -\ln 3.$$

- Tableau de variation de g :

x	$-\infty$		$-\ln 3$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$2+\ln 3$	↗	$+\infty$

(d) Le signe de $g(x)$ sur **R** :

$g(x) \geq 0$ car elle admet un minimum égale à $2+\ln 3 \geq 0$

Partie B

On considère la fonction f définie sur **R** par : $g(x) = 3x + 1 + xe^x$.

On note Cf la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1. Les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$:

- La limite de f en $-\infty$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} 3x+1=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x}=-\infty\end{array}\right\} par\ somme \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty.$$

- La limite de f en $+\infty$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 3x+1=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}=0\end{array}\right\} par\ somme \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty.$$

2. La dérivée de la fonction f est :

$$f'(x)=3+e^{-x}-xe^{-x}=\frac{3e^{x}+1-x}{e^{x}}=\frac{g(x)}{e^{x}}.$$

3. Tableau de variation de f :

$f'(x)=\dfrac{g(x)}{e^x}\geq 0$ car $g(x)\geq 0$ et $e^x>0$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

4. D'après le tableau de variation l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et $\alpha \approx -0{,}27$.

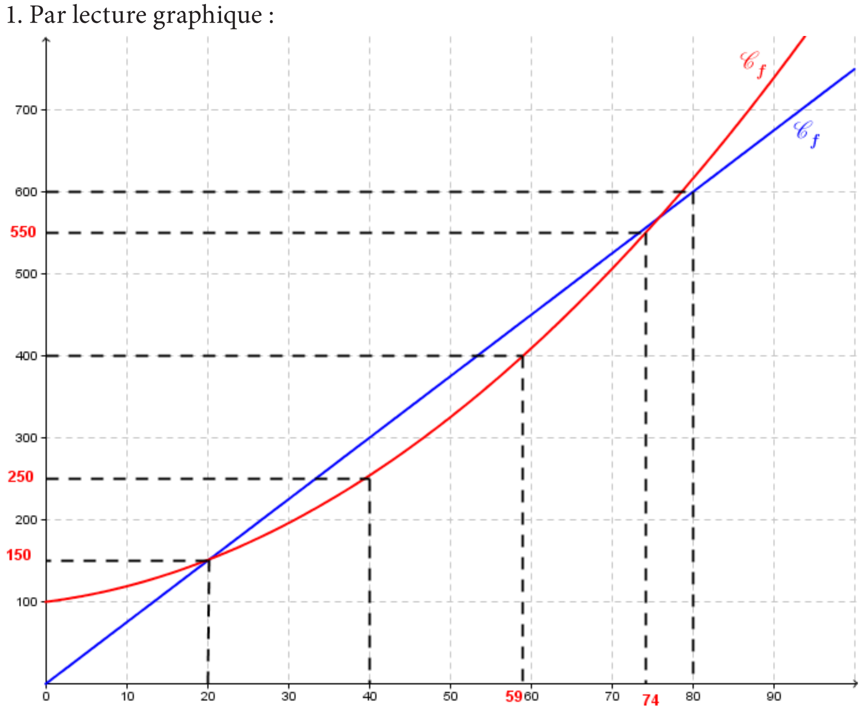
Exercice 3

Dans une petite entreprise, la fabrication journalière de x litres d'un certain produit chimique impose un coût de fabrication, en centaine DJF, noté $f(x)$.

Ce produit étant revendu au prix de 7,5 centaines DJF par litre, le chiffre d'affaires, en centaine DJF, réalisé par l'entreprise, pour la vente de x litres de ce produit est donc le nombre réel $g(x) = 7{,}5x$.

Partie A

1. Par lecture graphique :



(a) Le coût de fabrication pour une production journalière de 40 litres est 250 DJF et celui de 80 litres est 600 DJF.

(b) La production journalière correspond à un coût de fabrication de 550 DJF est 74 litres.

(c) La production journalière maximale pour que le coût de fabrication n'excède pas 400 DJF est 59 litres

2. L'entreprise doit fabriquer entre 20 et 80 d'unités pour être bénéficiaire.

Partie B

Dans la suite de l'exercice, on admet que la fonction f est définie, pour tout nombre réel x de l'intervalle [0;100] par la relation $f(x) = 0{,}0625x2 + 1{,}25x + 100$.

1. Pour tout nombre réel x de l'intervalle [0;100].

$g(x) - f(x) = 7{,}5x - (0{,}0625x^2 + 1{,}25x + 100) = 7{,}5x - 0{,}0625x^2 - 1{,}25x - 100 = 56{,}25 - 0{,}0625(x - 50)^2$.

2. Le bénéfice maximal que l'entreprise peut réaliser est 5625 DJF, la production journalière correspondante est 50 litres.

Exercice 4 (6 points)

Le tableau ci-dessous donne l'évolution de la population mondiale (en milliards) entre

2004 et 2010.

Année	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Rang de l'année : x_i	1	2	3	4	5	6	7
Nombre d'habitants (en milliards) : y_i	4,4	4,8	5,4	5,6	6	6,6	6,8

Partie A

1. voir annexe 2

2. (a) L'équation de la droite régression de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés : $y = 0{,}41x + 4{,}03$.

(b) voir dans annexe

3. En supposant que ce modèle reste valable jusqu'en 2018.

(a) L'effectif de la population mondiale en 2015 est : $y = 0{,}41 \times 12 + 4{,}03 = 8{,}95$ milliards d'habitants.

(b) La population mondiale devrait dépasser à 8 milliards d'habitants à partir de l'année **2014 :**

$y > 8 \Leftrightarrow 0{,}41x + 4{,}03 > 8 \Leftrightarrow x > 9{,}68.$ Donc $x = 10$ qui correspond en 2014.

Partie B

À partir des données fournies dans le tableau de la partie A.

1. Le taux d'évolution global de la population mondiale entre 2004 et 2010 est :

$$t_g = \left(\frac{6,8-4,4}{4,4}\right)\times 100 \simeq 54,55\,\%.$$

2. Le taux d'évolution moyen annuel de la population mondiale entre 2004 et 2010 est :

$$t_m = \left(\left(1+\frac{t_g}{100}\right)^{\frac{1}{7}} - 1\right)\times 100 \simeq 6,42\,\%.$$

3.

(a) L'algorithme affiche **2014** lorsqu'on saisit pour $x = 7$.

(b) Cet algorithme permet de calculer à partir de l'année que la population mondiale dépassera 8 milliards d'habitants à partir 2014.

ANNEXE :