Exercice 1 : (4 points) QCM

1. Réponse b.

$7^2 \equiv 1[48]$ donc $7^{2n} \equiv 1[48]$ avec $n \in \mathbf{N}$ et $\left(7^2\right)^{1009} \equiv 1[48]$

car $2018 = 2 \times 1009$.

2. Réponse b.

$f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

3. Réponse c.

$n = 5$.

4. Réponse c.

$m \approx 7{,}42$.

F est une primitive de f. On a : $m = \frac{1}{10}\left(F(10) - F(0)\right) \approx 7{,}42$.

Exercice 2 : (4 points)

1. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 6$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = 0$.

On en déduit alors que le triangle ABC est rectangle en B.

2. (ABC) : $8x - 5y + 11z - 1 = 0$.

3. $\Delta : \begin{cases} x = 1 + 8t \\ y = -34 - 5t \\ z = 3 + 11t \end{cases} \quad t \in \mathbf{R}$.

4. $E\begin{pmatrix} -7 \\ -29 \\ -8 \end{pmatrix}$

Exercice 3 : (7 points)

Partie A

$f(x) = ax^2 + bx + c + \ln(x)$.

1. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$.

2.

a) f est une fonction dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout $x > 0$, on a :

$$f'(x) = 2ax + b + \frac{1}{x}.$$

$$f''(x) = 2a - \frac{1}{x^2}.$$

b) $a = -5$; $b = 3$ et $c = 1$.

Partie B

1. $f'(x) = \dfrac{-4x^2 + 3x + 1}{x}$ (qui s'annule en $-0{,}25$ et 1).

Ainsi, $f'(x)$ est positif sur $]0\,;1]$ et négatif sur $[1\,;+\infty[$.

2. D'après le tableau de variations complété, l'équation $f'(x) = 1$ admet deux solutions sur $]0\,;+\infty[$.

3. $\alpha \approx 0{,}41$ et $\beta \approx 1{,}65$.

4.

a) Pour $t = \beta$, on a : Aire $= \beta - 1$ u.a.

b) Aire $= t - 1$.

Comme $1 \leq t \leq 2$ alors $0 \leq t - 1 \leq 0$.

Alors, $0 \leq$ aire ≤ 0.

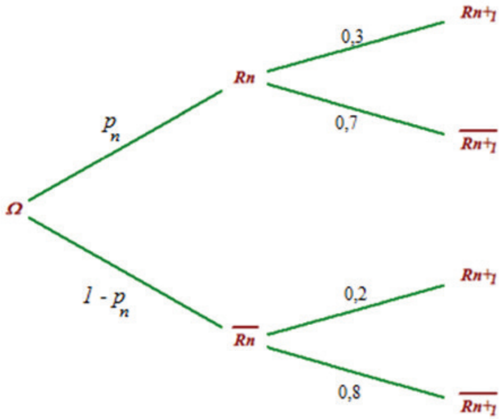
Exercice 4 : (5 points)

1. $0{,}3\times 0{,}05 + 0{,}7\times P_{\overline{I}}(R) = 0{,}155$. Donc, $P_{\overline{I}}(R) = 0{,}2$.

2.

a) Comme $p_1 = 0$, alors $p_2 = p(R_2) = 0{,}2$.
Et donc, $p_3 = p(R_3) = 0{,}2\times 0{,}3 + 0{,}8\times 0{,}2 = 0{,}22$.

b)



On a : $p_{n+1} = 0{,}3\times p_n + 0{,}2\times(1-p_n) = 0{,}1\times p_n + 0{,}2$.

c) (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}1$ et de premier terme $u_1 = -\frac{2}{9}$.

d) $u_n = -\frac{2}{9}\times(0{,}1)^{n-1}$ *et* $p_n = \frac{2}{9} - \frac{2}{9}\times(0{,}1)^{n-1}$.

e) $\lim\limits_{n\to+\infty} p(n) = \frac{2}{9}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} 10\times(0{,}1)^n = 0$.

À long terme, la probabilité que Elesol soit en retard un jour donné est de $\frac{2}{9}$.