Exercice 1 : (4 points)

1. Réponse b.

$$z=2\left(-\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)-i\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right)=2\left(\cos\left(-\frac{4\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right).$$

Alors la forme exponentielle de z est $z=2e^{i\frac{4\pi}{5}}$.

2. Réponse b.

$\left|\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right|=\left|\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i\right|=1$ et $\arg\left(\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right)\neq\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$. Donc ABC est isocèle en B.

3. Réponse c.

L'écriture décimale du nombre $\overline{547}^{8}$ est $5\times8^2+4\times8+7\times8^0=359$.

L'écriture décimale du nombre $\overline{101100111}^{2}$ est $2^8+2^6+2^5+2^2+2^1+2^0=359$.

4. Réponse c.

$1160\equiv 3\,[13]$. Donc $1160^{2016}\equiv 3^{2016}\,[13]$.

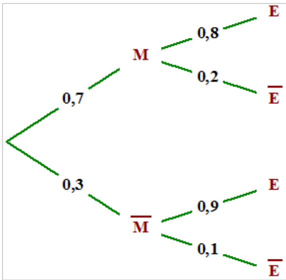
Or, $3^n\equiv 1\,[13]$ si $n=3q$ avec $q\in\mathbf{N}$, $3^n\equiv 3\,[13]$ si $n=3q+1$ et $3^n\equiv 9\,[13]$ si $n=3q+2$.

$2016=3\times672$, donc $3^{2016}\equiv 1\,[13]$ et par transitivité, $1160^{2016}\equiv 1\,[13]$.

Exercice 2 : (6 points)

Partie A

1.



2. $\overline{M} \cap E$ est l'événement « Assia a ramené sa fille à l'heure exacte à son école ».

$p(\overline{M} \cap E) = 0{,}3 \times 0{,}9 = 0{,}27.$

3. $p(E) = p(M \cap E) + p\left(\overline{M} \cap E\right) = 0{,}7 \times 0{,}8 + 0{,}3 \times 0{,}9 = 0{,}83.$

4. $p_E(\overline{M}) = \dfrac{p\left(\overline{M} \cap E\right)}{p(E)} = \dfrac{0{,}3 \times 0{,}9}{0{,}83} \approx 0{,}325.$

Partie B

1. $p(18 \leq T \leq 23) \approx 0{,}589.$

2. $p(T < 17) \approx 0{,}159.$

Exercice 3 : (6 points)

Partie A

Soit f la fonction définie sur **R** par : $f(x) = \ln(2 + e^x) - x - 1$.

1. **a)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(2 + e^x\right) = 2$ et $\lim\limits_{x \to 2} \ln(x) = \ln(2)$.

Donc par composée, $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln\left(2 + e^x\right) = \ln(2)$.

De plus, $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x - 1) = +\infty$, donc par somme, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

b) $f(x) = \ln\left(2 + e^x\right) - \ln\left(e^x\right) - 1 = \ln\left(\dfrac{2 + e^x}{e^x}\right) - 1.$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2 + e^x}{e^x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2}{e^x} + 1\right) = 1$ et $\lim\limits_{x \to 1} \ln(x) = 0.$

Donc par composée, $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln\left(\dfrac{2 + e^x}{e^x}\right) = 0$. Par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1.$

2. **a)** f est une fonction dérivable sur **R** et pour tout réel x, on a :

$$f'(x) = \frac{e^x}{2 + e^x} - 1 = \frac{-2}{2 + e^x} < 0.$$

b) On en déduit alors le tableau de variations :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$			$-$		
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

3. **a)** D'après le tableau de variations ci-dessus, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α.

À l'aide de la calculatrice, on obtient $\alpha \approx 0{,}15$.

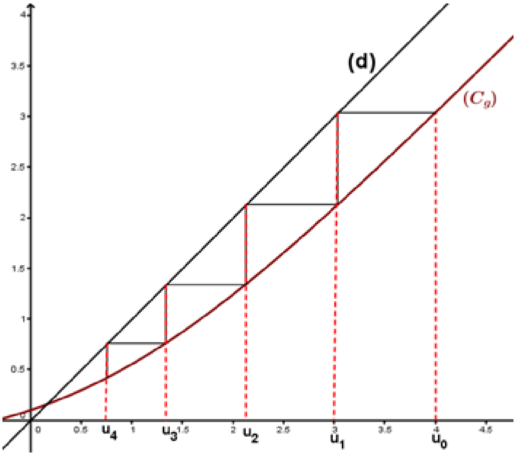
b) Par définition, on a $f(\alpha) = 0 \iff$ donc $\ln(2 + e^{\alpha}) - \alpha - 1 = 0$ et donc, $\ln(2 + e^{\alpha}) - 1 = \alpha$.

4.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Partie B

1.



2. La suite (u_n) semble décroissante et convergente.

3. **a)** Pour N = 4, l'algorithme affiche 0,762.

b) Cet algorithme permet de calculer le terme u_n avec n connue.

c)

Variables
N et i sont des entiers naturels
U et S sont des réels
Entrée
Saisir la valeur de N
Traitement
U prend la valeur 4
S prend la valeur U **0,25**
Pour i variant de 1 à N :
Affecter à U la valeur $\ln(2 + e^{U}) - 1$
S prend la valeur $S + U$ **0,25**
Fin de Pour
Sortie
Afficher S

4. **a)** Soit $P(n)$ la propriété : « Pour tout entier naturel n, $\alpha < u_n \leq 4$ ».
Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = 4$ et donc $\alpha < u_n \leq 4$. $P(0)$ est vraie.
Hérédité : Supposons que $P(n)$ est vraie pour un entier naturel n, montrons que $P(n + 1)$ est vraie aussi, c'est-à-dire que : $\alpha < u_{n+1} \leq 4$.

$\alpha < u_n \leq 4 \iff 2+e^{\alpha} < 2+e^{u_n} \leq 2+e^{4}$

$\iff \ln\left(2+e^{\alpha}\right)-1 < u_{n+1} \leq \ln\left(2+e^{4}\right)-1.$

Or $\ln\left(2+e^{\alpha}\right)-1=\alpha$ et $\ln\left(2+e^{4}\right)-1\approx 3{,}04.$

Donc, $\alpha < u_{n+1} \leq 4$. $P(n + 1)$ est aussi vraie.

Conclusion :

$P(0)$ est vraie et $P(n)$ est héréditaire. Donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n : $\alpha < u_n \leq 4$.

b) $u_{n+1}-u_n=\ln\left(2+e^{u_n}\right)-1-u_n=f\left(u_n\right).$
Or, d'après le tableau de signes de la fonction f (*voir Partie A question 4*), pour tout réel $u_n > \alpha$, $f(u_n) < 0$. Ainsi, $u_{n+1} - u_n < 0$, la suite (u_n) est décroissante.

c) La suite (u_n) est décroissante et minorée par α donc elle converge vers un réel l tel que $g(l) = l$.
Or $g(l) = l \iff \ln(2 + e^{l}) - 1 = l \iff \ln(2 + e^{l}) - 1 - l = 0 \iff f(l) = 0$.

Alors, d'après la question 3 de la Partie A, on a $l = \alpha$. On écrit $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n = \alpha$.

Exercice 4 : (4 points)

1. On a $\overrightarrow{AC}(-3\,;6\,;5)$ et $\overrightarrow{BC}(-2\,;-1\,;0)$.
   Or $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} = -3\times(-2)+6\times(-1)+5\times 0 = 0$.
   Donc le triangle ABC est rectangle en C. De plus, AC = $\sqrt{70}$ et BC = $\sqrt{5}$.
   L'aire du triangle ABC est donc A = $\dfrac{BC\times AC}{2} = \dfrac{5\sqrt{14}}{2}$.

2. **a)** $\vec{n}\,.\overrightarrow{AC} = -1\times(-3)+2\times 6+5\times(-3)=0$ et $\vec{n}\,.\overrightarrow{BC} = -2\times(-1)-1\times 2+0\times(-3)=0$
   avec $\overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{BC}$ deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC).
   On en déduit alors que le vecteur $\vec{n}(-1\,;2\,;-3)$ est un vecteur normal du plan (ABC).

   b) Une équation cartésienne du plan (ABC) est $-x+2y-3z-5=0$.

3. Le vecteur $\vec{n}(-1\,;2\,;-3)$ est un vecteur directeur de la droite (d) perpendiculaire au plan (ABC).
   Une représentation paramétrique de la droite (d) est : $\begin{cases} x=-2-t \\ y=-5+2t \\ z=5-3t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

4. Les coordonnées du point H, intersection de la droite (d) et du plan (ABC) vérifient le système :
   $$\begin{cases} x_H=-2-t \\ y_H=-5+2t \\ z_H=5-3t \\ -x_H+2y_H-3z_H-5=0 \end{cases}$$
   On obtient alors : $t=2$ et $H(-4\,;-1\,;-1)$.

5. $DH=\sqrt{56}$.
   Le volume du tétraèdre ABCD est donc : $V=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{BC\times AC}{2}\times DH\right)=\dfrac{70}{3}$.