Sujet 1

Série / S — Épreuve / Mathématiques — Durée / 4 H

Coefficient / 9 — Baccalauréat / 1er tour — Session / 2016

L'utilisation de la calculatrice est autorisée.
Le candidat doit traiter les quatre exercices.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 : (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Pour chaque question, trois réponses sont proposées, une seule est exacte. Le candidat portera sur la copie le numéro de la question suivi de la lettre correspondant à la réponse choisie ainsi que la justification de ce choix.
Il est attribué 1 point si la réponse est exacte et justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.

1. L'écriture exponentielle du nombre complexe $z=-2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right)$ est :

   a) $-2e^{-i\frac{\pi}{5}}$ b) $2e^{i\frac{4\pi}{5}}$ c) $2e^{i\frac{\pi}{5}}$.

2. Dans le plan complexe, on donne les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2 + 2i$, $z_B = 5 - 2i$ et $z_C = 5 + 3i$. Alors, le triangle ABC est :

   a) équilatéral b) isocèle c) rectangle.

3. On considère le nombre $N=\overline{547}^{8}$. L'écriture binaire du nombre N est :

   a) $N=\overline{111001101}^{2}$ b) $N=\overline{101010111}^{2}$ c) $N=\overline{101100111}^{2}$.

4. On considère l'entier $N = 1160^{2016}$. L'entier N est congru à :

   a) 3 modulo 13 b) 9 modulo 13 c) 1 modulo 13.

Exercice 2 : (6 points)

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes. Les probabilités seront arrondies au millième.

Un couple (Mohamed et Assia) travaillant dans une même entreprise doit se rendre en voiture au travail chaque matin à 7 h 30. Le couple dépose en chemin leur fille de 4 ans à l'école maternelle dont le portail d'entrée s'ouvre à 7 h 15. Le couple souhaite arriver chaque jour à l'heure exacte de l'ouverture du portail de l'école maternelle.

Partie A

Pour aller le matin au travail, c'est Mohamed qui conduit la voiture dans 70 % des cas et c'est Assia qui conduit les autres jours.
Le jour où Mohamed conduit la voiture, il arrive devant le portail de l'école maternelle à 7 h 15 avec une probabilité de 0,8 alors que sa femme dépose sa fille à l'heure exacte dans 90 % des cas.
On choisit au hasard un jour où la fille est conduite à l'école.
On considère les événements suivants :

- M : « Mohamed conduit la voiture ».
- E : « La voiture arrive exactement à 7 h 15 devant l'école maternelle ».

1. Traduire la situation par un arbre de probabilités.
2. Traduire par une phrase l'événement $\overline{M} \cap E$ puis calculer $p\left(\overline{M} \cap E\right)$.
3. Montrer que la probabilité que la fille est ramenée à l'heure exacte devant le portail de l'école est 0,83.
4. Un jour donné, le couple arrive à l'heure exacte devant l'école de leur fille.
   Quelle est la probabilité que c'est Assia la conductrice de la voiture.

Partie B

On admet que lorsque Mohamed conduit, la durée du trajet entre la maison du couple et l'école, exprimée en minutes, peut être modélisée par la variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 20$ et d'écart-type $\sigma = 3$.

1. Déterminer la probabilité que le trajet dure entre 18 et 23 minutes.
2. Déterminer la probabilité que Mohamed mette moins de 17 minutes pour arriver à l'école de sa fille.

Exercice 3 : (6 points)

Partie A

Soit f la fonction définie sur **R** par : $f(x) = \ln(2 + e^x) - x - 1$.

1. a) Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

b) Montrer que pour tout réel x, $f(x) = \ln\left(\dfrac{2+e^x}{e^x}\right) - 1$ et en déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

1. **a)** Déterminer $f'(x)$ et étudier son signe.

b) En déduire le tableau de variations de la fonction f.

2. **a)** Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α sur **R**. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de α.

b) Justifier l'égalité : $\ln(2 + e^x) - 1 = \alpha$.

3. Déterminer le signe de la fonction f sur **R**.

Partie B

On considère la suite numérique (u_n) définie pour tout entier naturel n, par :

$u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \ln\left(2+e^{u_n}\right) - 1.$

Sur la **feuille donnée en annexe**, on a tracé dans un repère orthonormé la courbe $(\mathscr{C}g)$ représentative de la fonction g définie sur **R** par $g(x) = \ln(2 + e^x) - 1$ ainsi que la droite (d) d'équation $y = x$.

1. Représenter graphiquement, sur la feuille annexe, les cinq premiers termes de la suite (u_n).
(On laissera apparentes les traces de la construction).

2. Quelles conjectures peut-on formuler sur la suite (u_n) ?

3. On considère l'algorithme ci contre :

a) Donner une valeur approchée à 10^{-3} près du résultat affiché par cet algorithme lorsque l'on choisit $N = 4$.

b) Que permet de calculer cet algorithme ?

c) On pose : $S = u_0 + u_1 + ... + u_n$.
Modifier l'algorithme ci-contre pour qu'il affiche le nombre S en sortie.

Variables
N et i sont des entiers naturels
U est un réel
Entrée
Saisir la valeur de N
Traitement
U prend la valeur 4
Pour i variant de 1 à N :
Affecter à U la valeur $\ln(2 + e^U) - 1$
Fin de Pour
Sortie
Afficher U

4. **a)** Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $\alpha < u_n \leq 4$ où α est le réel obtenu dans la **Partie A**.

b) Déterminer le sens de variations de la suite (u_n).

c) Démontrer que la suite (u_n) converge vers le réel α.

Exercice 4 : (4 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On donne les points A (1 ; –6 ; –6), B (0 ; 1 ; – 1), C (– 2 ; 0 ; – 1) et D (– 2 ; 5 ; 5).

1. Déterminer la nature du triangle ABC et calculer son aire.

2. **a)** Montrer que le vecteur $\vec{n}\left(-1\,;2\,;-3\right)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

b) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (*d*) perpendiculaire au plan (ABC) et passant par le point D.

4. Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite (*d*) et du plan (ABC).

5. Déterminer le volume du tétraèdre ABCD.

Annexe (Exercice 3)