> L'utilisation de la calculatrice est interdite.
> Le candidat doit traiter tous les items et l'exercice.
> Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
> Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Item 1 (1 point) : QCM avec justification

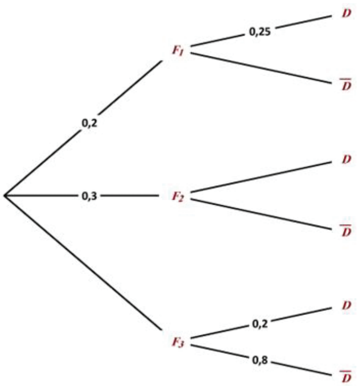
Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \dfrac{1+n^2}{4-3n^2}$.

La suite (u_n) a pour limite :

a) $+\infty$ **b)** n'admet pas de limite **c)** $-\dfrac{1}{3}$ **d)** $\dfrac{1}{4}$.

Items 2 et 3 (2 points)

On considère l'arbre pondéré ci-contre dans lequel on suppose que F_1, F_2 et F_3 constituent un système fondamental d'événements.



1. Donner la probabilité $p\left(\overline{D} \cap F_3\right)$.
2. Sachant que $p(D) = 0{,}18$, déterminer la probabilité $p_{F_2}(D)$.

Items 4 et 5 (2 points) : QCM sans justification

X est une variable aléatoire qui suit la loi normale $N(0\,;1)$.

On donne de plus : $p(X \geq 0{,}82) \approx 0{,}206$ et $p(X \leq 1{,}23) \approx 0{,}891$.

1. $p(X \leq 0{,}82) \approx$

a) 0,794 **b)** 0,18 **c)** 0,294 **d)** 0,206.

2. $p(0{,}82 \leq X \leq 1{,}23) \approx$

a) 0,685 b) 0,597 c) 0,097 d) 0,41.

Items 6 et 7 (2 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé.

On considère la droite (d) passant par le point M (3 ; 1 ; – 2) et de vecteur directeur

$\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d).

2. Déterminer les coordonnées du point K intersection de la droite (d) et du plan (P) d'équation cartésienne $2x - y + z + 3 = 0$.

Items 8 et 9 (2 points)

1. Justifier que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\sqrt{3+x} - 1}{x+2} \right) = 0$.

2. Calculer la dérivée de la fonction f définie sur **R** par : $f(x) = \sqrt{x^2 + 5x + 7}$.

Item 10 (1 point)

Montrer que la fonction g définie par $g(x) = \int_0^x \dfrac{4}{t^2+4} dt$ est croissante sur **R**.

Item 11 (1 point)

Soit la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 0,75.

Reproduire et compléter l'algorithme ci contre permettant de déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $u_n < 10^{-6}$.

Variables
u et n
Traitement
$0 \to n$
$1 \to u$
Tant que ....
  $0{,}75\,u \to u$
  $1 + n \to n$
Sortie
Afficher ....

Item 12 (1 point)

Résoudre dans **R** l'inéquation : $2\ln(x) - \ln(x-3) \leq \ln(x+11)$.

Item 13 (1 point) : Vrai ou Faux

Pour chacune des propositions suivantes, répondre par vrai ou faux en justifiant :

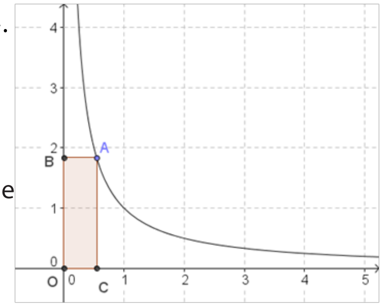
1. $17 \equiv 11\ [4]$.
2. $37^{195} \equiv 1\ [4]$.

Item 14 (1 point)

Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

A est le point de la courbe $\mathscr{C}f$ représentative de la fonction f d'abscisse x.

Une animation sur GeoGebra montre que l'aire du rectangle OBAC représenté dans le graphique ci-contre semble constante quelque soit la position du point A sur la courbe $\mathscr{C}f$.



Justifier cette conjecture.

Items 15 et 16 (2 points)

Le plan étant muni d'un repère orthonormé, on considère les deux points A (4 ; 3 ; 0) et B (6 ; 11 ; – 2) ainsi que la droite (Δ) définie par le système d'équations paramétriques suivant :

$$\begin{cases} x = -1 + k \\ y = 13 - 2k \\ z = -10 + 2k \end{cases} \qquad \text{avec } k \in \mathrm{R}$$

1. Vérifier que le point A appartient à la droite (Δ).
2. Déterminer l'équation cartésienne du plan (P) contenant la droite (Δ) et le point B.

Exercice 4 : (4 points)

On considère la fonction f définie sur $]3\,;+\infty[$ par : $f(x) = (x+1)\ln(x-3)$.

1. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Préciser les asymptotes éventuelles.
2. Calculer $f'(x)$.
3. Calculer $f''(x)$ et en déduire les variations de $f'(x)$.
4. En déduire le signe de $f'(x)$ sur $]3\,;+\infty[$.
5. Déterminer le tableau de variations de f.