

Réponses	Barème	Compétences	Consignes de correction
<p><b>Items 1 et 2 : (2points)</b></p> <p><math>\Delta = 5^2 - 4 \times 4 = 25 - 16 = 9</math>, d'où</p> <p>1. <math>(\ln x)^2 + 5 \ln x + 4 = 0</math>.  <math>x_1 = \frac{-5 - \sqrt{9}}{2} = -4</math>; <math>x_2 = \frac{-5 + \sqrt{9}}{2} = -1</math></p> <p>Donc <math>\ln x = -4 \Leftrightarrow x = e^{-4}</math>; <math>\ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}</math>.</p> <p>2. L'inéquation <math>\ln(2x-5)</math> existe si et seulement si</p> <p><math>2x-5 &gt; 0 \Leftrightarrow x &gt; \frac{5}{2}</math>. De même, <math>\ln(x+2)</math> existe si et seulement si <math>x &gt; -2</math>. On travaille sur <math>]5/2 ; +\infty [</math>.</p> <p><math>\ln(2x-5) \leq \ln(x+2) \Leftrightarrow 2x-5 \leq x+2 \Leftrightarrow x \leq 7</math>. La solution de l'inéquation est : <math>]\frac{5}{2}; 7]</math></p>	<p><b>1</b></p> <p><b>1</b></p>		
<p><b>Items 3 et 4 : (2 points)</b></p> <p>1. <math>\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{6+i-(3+5i)}{-1+2i-3-5i} = \frac{6+i-3-5i}{-1+2i-3-5i} = \frac{3-4i}{-4-3i}</math></p> <p><math>= \frac{(3-4i)(-4+3i)}{(-4-3i)(-4+3i)} = \frac{-12+9i+16i-12i^2}{16-12i+12i-9i^2} = \frac{25i}{25} = i</math>, d'où</p> <p><math>\arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_B - z_A}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}</math></p> <p>2. <math>AB =</math></p> <p><math>\ \overline{AB}\  =  z_B - z_A  =  -1+2i-3-5i  =  -4-3i  = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = 5</math></p> <p><math>AC =</math></p> <p><math>\ \overline{AC}\  =  z_C - z_A  =  6+i-3-5i  =  3-4i  = \sqrt{(-4)^2 + (3)^2} = 5</math></p>	<p><b>1</b></p> <p><b>1</b></p>		



<p>négative sur <math>\mathbb{R}</math> ce qui entraîne que <math>f</math> est décroissante sur <math>\mathbb{R}</math>.</p>			
<p><b>Item 10 : (1 point)</b>  Par récurrence sur <math>\mathbb{N}</math>.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Pour <math>n=0</math>, on a : <math>4^0 - 1 = 1 - 1 = 0</math> donc <math>P_0</math> est vraie.</li> <li>Supposons que <math>P_n</math> soit vraie jusqu'au rang <math>n</math> et vérifions qu'elle est vraie au rang <math>n+1</math> :</li> </ul> $4^{n+1} - 1 = 4 \times 4^n - 1 = 4 \times 4^n - 4 + 3 = 4(4^n - 1) + 3 = 4 \times 3k + 3$ , (où $k$ est un nombre entier) D'où $4^{n+1} - 1 = 3(4k+1)$ et en posant $k' = 4k+1$ , on a $4^{n+1} - 1 = 3k'$ ( $k'$ est bien un nombre entier) donc $P_{n+1}$ est vraie. Par principe de raisonnement par récurrence, on a pour tout entier $n$ , $4^n - 1$ est un multiple de 3. <ul style="list-style-type: none"> <li>Conclusion <math>4^n - 1</math> est un multiple de 3 pour tout entier naturel <math>n</math></li> </ul>	<p><b>1</b></p>		<p>Autre manière</p> <p>D'après formule de binôme :</p> $a^n - b^n = (a-b) \times \sum_{k=0}^{n-1} C_k^{n-1} a^k \times b^{n-1-k}$ $4^n - 1 = 4^n - 1^n = (4-1) \times \sum_{k=0}^{n-1} C_k^{n-1} 4^k \times 1^{n-1-k} = 3 \times \sum_{k=0}^{n-1} C_k^{n-1} 4^k$ <p>donc</p> <p><math>4^n - 1</math> est un multiple de 3 pour tout entier naturel <math>n</math></p>
<p><b>Items 11, 12 et 13 : (3 points)</b></p> <p>Soit <math>f(x) = \frac{x}{x+1}</math>.</p> <p>1. <math>f(x) = \alpha + \frac{\beta}{x+1} = \frac{\alpha(x+1) + \beta}{x+1} = \frac{\alpha x + \alpha + \beta}{x+1}</math>, d'où par identification <math>\begin{cases} \alpha = 1, \\ \alpha + \beta = 0 \Leftrightarrow \beta = -1. \end{cases}</math></p> <p>2. <math>I = \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx = \int_0^1 \left(1 + \frac{-1}{x+1}\right) dx = \int_0^1 1 dx - \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = 1 - \ln 2</math></p> <p>3. <math>J = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx</math>. la fonction <math>\frac{e^x}{e^x + 1}</math> est de la forme <math>\frac{u'}{u}</math>, avec <math>u &gt; 0</math>, donc :</p>	<p><b>1</b></p> <p><b>1</b></p> <p><b>1</b></p>		

$$J = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx = [\ln(e^x + 1)]_0^1 = \ln(e + 1) - \ln(2).$$

**Items 14 et 15 : (2 points)**

1. On considère les points A (-1 ; -1 ; 1), B (1 ; 2 ; -1) et C (0 ; 1 ; 1).

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Comme } \frac{0}{2} \neq \frac{2}{3}, \text{ on en déduit que les}$$

vecteurs ne sont pas colinéaires et donc forment une base du plan. Conclusion A, B et C définissent un plan dans l'espace.

2. On cherche un vecteur normal aux vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$ .

$$\text{Soit } \vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}. \text{ Le vecteur } \vec{n} \text{ est tel que : } \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \text{ et } \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0.$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ convient. D'où l'équation cartésienne du plan est :}$$

$4x - 2y + z + d = 0$ . Comme le point A (-1 ; -1 ; 1) est un point du plan, on trouve :  $-4 + 2 + 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = 1$ .

Conclusion :  $4x - 2y + z + 1 = 0$  est une équation cartésienne du plan ABC.

1

1

$$\text{Pour trouver } \vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \text{ on résout le système } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases},$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ convient.}$$

**Item 16: (1 point)**

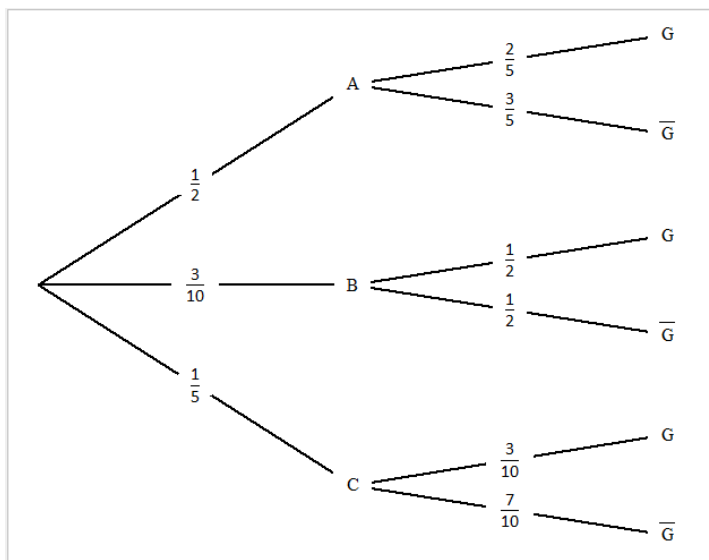
```
def seuil():  
    n=0  
    v=1/6  
    while  
v<1000:  
        n=n+1  
        v=5*v  
    return n
```

1

Accepter la formule explicite aussi  $v = 1/6 * 5^{**}n$

**Exercice : 4 points**

1.



1

Tenir compte de la cohérence des résultats.

2.

$$p(B \cap G) = p(B) \times p_B(G) = \frac{3}{10} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{20}$$

1

3.

$$p(\bar{G}) = p(A \cap \bar{G}) + p(B \cap \bar{G}) + p(C \cap \bar{G}) =$$

$$p(\bar{G}) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{10} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \times \frac{7}{10}$$

$$p(\bar{G}) = \frac{590}{1000} = \frac{59}{100}$$

4.  $p_{\bar{G}}(A) = \frac{p(A \cap \bar{G})}{p(\bar{G})} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{3}{5}}{\frac{59}{100}} = \frac{3}{59}$ .

1

1